

1 – ESAME DI AMMISSIONE AL DOTTORATO IN FISICA

Svolgere il tema e non più di tre esercizi

Tema - Descrivere un fenomeno fisico che si può interpretare con un modello di propagazione per onde. Discutere il modello teorico, le previsioni e una o più verifiche sperimentali.

1. Facendo cadere delle palline si nota che le coordinate x, y del punto di impatto su un piano orizzontale sono indipendenti e distribuite in modo gaussiano con valor medio nullo e varianza σ^2 . Calcolare la funzione di distribuzione della distanza dal punto $x = 0, y = 0$ e la probabilità che la distanza sia minore di σ .
[distribuzione di Gauss: $f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-x^2/2\sigma^2}$]
2. Un disco di raggio R di materiale omogeneo e isolante è in rotazione attorno al suo asse di simmetria con velocità angolare ω . Il disco ha massa m e carica elettrica q . Calcolare il momento angolare e il momento di dipolo magnetico. Discutere il moto del disco se è presente un campo magnetico e θ è l'angolo tra \vec{B} e l'asse del disco. (Si trascuri l'emissione di radiazione elettromagnetica).
3. Il Sole ha raggio $7.0 \cdot 10^8$ m e irraggia energia come un corpo nero a temperatura di 5600 K. L'energia è fornita dalle reazioni di fusione in cui 4 nuclei di Idrogeno si trasformano in uno di Elio producendo 26 MeV. Calcolare la massa di idrogeno consumata al secondo.
4. La differenza di energia tra gli stati $2p$ e $1s$ dell'atomo di idrogeno è 10.2 eV. Calcolare la differenza di energia per l'atomo di deuterio e per il positronio (stato legato elettrone-positrone) e il potere risolutivo $\Delta\lambda/\lambda$ per separare le righe di emissione dell'idrogeno naturale (che contiene i due isotopi).

$$\varepsilon_0 = 8.9 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

$$c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\hbar = 6.6 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}$$

$$k = 1.4 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

$$N_A = 6.0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$m_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

$$g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$N_A k T_{amb} / p_{amb} = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$$

2 - ESAME DI AMMISSIONE AL DOTTORATO IN FISICA

Svolgere il tema e non più di tre esercizi

Tema - Il modello dell'oscillatore armonico è alla base della descrizione di molti fenomeni fisici. Discutere un esempio, nell'ambito della fisica classica o quantistica, illustrando previsioni e verifiche sperimentali.

1. Si immagini di avere tre particelle di spin $\frac{1}{2}$ ai vertici di un triangolo equilatero e si assuma che la loro interazione sia descritta dalla hamiltoniana

$$H = J (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_1)$$

dove J è una opportuna costante dimensionale e $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ ($\vec{\sigma}$ indica il vettore delle matrici di Pauli, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$). Quali sono i possibili autovalori di H e quale è la probabilità di trovare ognuno di questi facendo una misura dell'energia ?

2. Un laboratorio spaziale percorre un'orbita circolare in modo da essere sempre sulla verticale dello stesso punto sulla Terra dove è situata una base di lancio. Calcolare la distanza dalla superficie della Terra e la minima velocità iniziale di un vettore spaziale (senza motore) per raggiungere il laboratorio (trascurando effetti di attrito).

[raggio della Terra = $6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$]

3. Una linea elettrica è costituita da due fili di rame rettilinei di raggio 5 mm disposti parallelamente a distanza di 1 m uno dall'altro. La linea è lunga 40 Km e i due fili sono percorsi dalla stessa corrente in verso opposto. Calcolare il coefficiente di autoinduzione della linea supponendo che sia nel vuoto.

4. Nella tomografia al positronio un nucleo emettitore β^+ è iniettato nel tessuto biologico sottoposto a indagine. Si forma il positronio che decade a riposo in due fotoni. La sezione d'urto dei fotoni per effetto Compton è approssimata con $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_T(m_e c^2/E_\gamma)^2$. Il materiale ha densità 1 g/cm^3 e rapporto tra numero e peso atomico $Z/A = 1/2$. Calcolare la probabilità che i due fotoni siano rivelati all'esterno senza interagire nel materiale che ha spessore 8 cm .

[sezione d'urto di Thomson: $\sigma_T = (8\pi/3)r_e^2 = 0.67 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$]

$$\varepsilon_0 = 8.9 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

$$c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\hbar = 6.6 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}$$

$$k = 1.4 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

$$N_A = 6.0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$m_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

$$g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$N_A k T_{amb}/p_{amb} = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$$

3 - ESAME DI AMMISSIONE AL DOTTORATO IN FISICA
Svolgere il tema e non più di tre esercizi

Tema - I metodi perturbativi per la descrizione dei fenomeni fisici: discutere caratteristiche generali, successi e limiti di applicabilità, con esempi.

1. Una particella di massa m e carica elettrica q si muove sotto l'azione di una forza elastica k e in presenza di un campo magnetico costante e uniforme \vec{B} ortogonale al piano del moto. Determinare, in funzione delle condizioni iniziali supposte note, delle pulsazioni $\omega_o^2 = k/m$, $\omega_c = qB/2m$, i valori massimi e minimi della distanza dal centro di forza. (Si trascuri l'emissione di radiazione elettromagnetica).
2. Un pallone con pareti sottili contiene una mole di Elio ed è in equilibrio con l'aria esterna ($\frac{3}{4}$ Azoto + $\frac{1}{4}$ Ossigeno) a condizioni standard di pressione e temperatura. Calcolare la massa del pallone perché non vari di quota. (Trattare Elio e Aria come gas ideali).
3. Una pompa di calore preleva calore da una grande massa di acqua a temperatura $0^\circ C$ e la riversa in un ambiente la cui temperatura è mantenuta a $20^\circ C$. La macchina funziona in modo reversibile ed esegue 2 cicli al minuto assorbendo un lavoro di 4000 J per ciclo. Calcolare la quantità di ghiaccio prodotta in un'ora e la variazione di entropia subita dall'acqua. [calore latente di solidificazione dell'acqua: $19 J/Kg$]
4. L'elettrone di valenza di un atomo di Sodio è eccitato allo stato 4^2P . Il valore dei primi livelli di energia dell'atomo di Sodio, in cm^{-1} , sono

| | ℓ | $n = 3$ | $n = 4$ |
|-------|--------|---------|---------|
| 2S | 0 | 41445 | 16707 |
| 2P | 1 | 24493 | 11182 |
| 2D | 2 | 12274 | 6898 |
| 2F | 3 | | 6859 |

Indicare quali e quanti sono i possibili modi di decadimento allo stato fondamentale (in approssimazione di dipolo elettrico).

| | |
|---|---|
| $\varepsilon_o = 8.9 \cdot 10^{-12} F m^{-1}$ | $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} H m^{-1}$ |
| $c = 3.0 \cdot 10^8 m s^{-1}$ | $g = 9.8 m s^{-2}$ |
| $\hbar = 6.6 \cdot 10^{-16} eV s$ | $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ |
| $k = 1.4 \cdot 10^{-23} J K^{-1}$ | $\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ |
| $N_A = 6.0 \cdot 10^{23} mol^{-1}$ | $N_A k T_{amb} / p_{amb} = 22.4 \cdot 10^{-3} m^3 mol^{-1}$ |
| $m_e = 0.51 MeV/c^2$ | $m_p = 938 MeV/c^2$ |

ESAME DI AMMISSIONE AL DOTTORATO IN FISICA
Esercizi della prova scritta estratta (numero 2)

1. Con 3 spin $1/2$ si formano 8 combinazioni. Sommando due spin $1/2$ si ottiene un tripletto di spin 1 e un singoletto di spin 0. Sommando questi con il terzo spin $1/2$ si ottiene un quartetto di spin $3/2$ e due doppietti di spin $1/2$. Il momento angolare totale è $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$.

$$\vec{S}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + \vec{S}_3^2 + 2(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_1)$$

La hamiltoniana $H = \frac{J}{2} (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 - \vec{S}_3^2)$ ha autovalori $E = \frac{J\hbar^2}{2} [S(S+1) - 3 \frac{3}{4}]$

Per $S = 3/2$ si ha $E = \frac{J\hbar^2}{2} [\frac{15}{4} - \frac{9}{4}] = +\frac{3J\hbar^2}{4}$ con molteplicità 4.

Per $S = 1/2$ si ha $E = \frac{J\hbar^2}{2} [\frac{3}{4} - \frac{9}{4}] = -\frac{3J\hbar^2}{4}$ con molteplicità 4.

2. Il laboratorio spaziale fa una traiettoria circolare nel piano equatoriale con velocità angolare pari a quella della rotazione terrestre $\omega = 2\pi/T$; $T = 86400$ s. La forza gravitazionale è pari al prodotto di massa e accelerazione centripeta:

$GmM/r^2 = m\omega^2 r$ (terza legge di Keplero); con $mg = GmM/R^2$; $GM = gR^2$;

$$r^3 = \frac{gR^2 T^2}{4\pi^2} \quad r = 42.4 \cdot 10^6 \text{ m} \quad d = r - R = 36 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La minima velocità iniziale di un corpo di massa μ per raggiungere il laboratorio spaziale si ottiene dalla conservazione dell'energia: $\mu v^2/2 = G\mu M/R - G\mu M/r$;
 $v^2 = 2gR^2(r - R)/rR = 2gRd/r$; $v = 10^4 \text{ m s}^{-1}$.

3. Il campo di induzione magnetica prodotto nel vuoto da un filo (lungo) percorso dalla corrente i [$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o i$] è dato dalla legge di Biot-Savart $B(r) = \mu_o i/2\pi r$. Se i fili nel piano $x-y$ sono a distanza d , sono lunghi ℓ e sono percorsi dalla stessa corrente in versi opposti si ha

$$B(x) = \frac{\mu_o i}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right)$$

Il flusso del campo \vec{B} (trascurando il flusso all'interno dei fili di raggio a) è

$$\int \vec{B} \cdot \hat{z} \, dx dy = Li = \frac{\mu_o i \ell}{2\pi} \left(\int_a^{d-a} \frac{dx}{x} + \int_a^{d-a} \frac{dx}{d-x} \right) = \frac{\mu_o i \ell}{\pi} \ln(d-a)/a$$

$$L \simeq (\mu_o \ell/\pi) \ln d/a = 8.5 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

4. Il positronio ha massa $2m_e$ e decade a riposo in due fotoni di energia $E_\gamma = m_e c^2$. La sezione d'urto è $\sigma = \sigma_T/2 = 0.33 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Il coefficiente di assorbimento è $\mu = n_e \sigma$ e il numero di elettroni per unità di volume è $n_e = ZN_A \rho/A = \frac{1}{2} 6.0 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}$.
 $\mu = 3 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3} \times 0.33 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0.1 \text{ cm}^{-1}$. La probabilità di attraversare lo spessore ℓ è

$$\int_\ell^\infty \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu \ell} = e^{-0.8} = 0.45$$

La probabilità di rivelare entrambe i fotoni è $0.45^2 = 0.20$.